TEMA 1.1: MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1 Definición de cuerpo conmutativo

Definición 1.1. Un **Cuerpo Conmutativo** es un conjunto $I\!K \neq \emptyset$ con dos operaciones internas (+ suma y $\cdot$ producto) tal que $I\!K$ con la suma y $I\!K \backslash \{0\}$ con el producto son Grupo Abeliano (tienen las propiedades Asociativa, Conmutativa, Elemento neutro y Elemento simétrico) y además cumplen la propiedad Distributiva (a·(b+c)=a·b+a·c).

EJEMPLOS de Cuerpos Conmutativos:

- Los conjuntos de los números reales, $I\!R$ y de los números complejos, $\mathbb{C}$, son cuerpos conmutativos.
- El conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ de las congruencias módulo 2 es un cuerpo conmutativo con las operaciones

$$\begin{array}{lcl} \text{SUMA} & : & \bar{0}+\bar{0}=\bar{1}+\bar{1}=\bar{0} \\ & & \bar{0}+\bar{1}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{PRODUCTO} & : & \bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{1}\cdot\bar{0}=\bar{0} \\ & & \bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1} \end{array}$$

  Como $\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$, el opuesto de $\bar{1}$ es también $\bar{1}$, y así $-\bar{1}=\bar{1}$. En consecuencia, la resta es idéntica a la suma.

2 Matrices

Sea A una matriz de m filas y n columnas (A $\in \mathcal{M}_{mxn}(I\!K)$)

$$\text{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{ij} \in I\!K$ es el elemento de la fila i y columna j. Decimos que una matriz es cuadrada si $m = n$.

MATRIZ TRASPUESTA: A^t

La matriz traspuesta de A, que notamos A^t, es una matriz de n filas y m columnas tal que las filas de A son las columnas de A^t, es decir, $\text{A}^t \in \mathcal{M}_{nxm}(I\!K)$ $\text{A}^t = (a^*_{ij})$ con $a^*_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \text{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nxm}(I\!K)$$

MATRICES CUADRADAS: A $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$

- Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$, es simétrica si A = A^t.

$$\text{Ej. A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 3/4 \\ \sqrt{3} & -3/4 & -1 \end{pmatrix} \text{ no es una matriz simétrica}$$

- Diagonal de una matriz cuadrada: Dada A $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$, la diagonal son los elementos de la forma $a_{ii}, i = 1, \dots, n$ i.e. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

- Traza de una matriz cuadrada: es la suma de los elementos de la diagonal, i.e. dada $A \in \mathcal{M}_{nxn}(I\!\!K)$, $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.
- Matriz diagonal: es una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{nxn}(I\!\!K)$ tal que todos sus elementos son 0 salvo en la diagonal, en la que pueden tomar cualquier valor.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Ej. } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Matriz identidad de orden n $I_n \in \mathcal{M}_{nxn}(I\!\!K)$, es una matriz cuadrada, diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal tienen valor 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

OTRAS MATRICES: $A \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$

- Matriz nula: Es aquella cuyos elementos son todos 0

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$$

- Matriz triangular superior: es la que tiene ceros a la izquierda y por debajo de un triángulo

$$\text{Ejs. } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES :

1. SUMA DE MATRICES: Sean A y B matrices, $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$.
   Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se define $C = A + B$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$ la matriz cuyos elementos son $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$
   Propiedades
   (a) Conmutativa: $A + B = B + A$.
   (b) Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
   (c) Elemento neutro: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$. Verifica que $A + 0 = 0 + A = A$.
   (d) Elemento opuesto: Para cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$, su opuesto es una matriz A' $= (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K)$ con $b_{ij} = -a_{ij}, \forall i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$

   Con estas propiedades $(\mathcal{M}_{mxn}(I\!\!K), +)$ tiene estructura de **grupo abeliano**

2. PRODUCTO POR UN NÚMERO: Sea A una matriz y λ un número, A $\in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si A = (a_{ij}), se define λ A = $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$ la matriz cuyos elementos son $b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$

   Propiedades

   (a) El producto de una matriz por un número es conmutativo: λA = Aλ.

   (b) El producto de una matriz por un número es distributivo:
   $(\lambda + \mu)$A = λA + μA, λ(A + B) = λA + λB.

3. PRODUCTO DE MATRICES: Sean A y B matrices, A $\in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$, B $\in \mathcal{M}_{nxp}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}, C = A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxp}(\mathbb{K})$$

   donde $c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

   Propiedades

   (a) No es conmutativa.

   (b) Asociativa: (A · B) · C = A · (B · C).

   (c) Elemento neutro:

      i. Si $m \neq n$, $\mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$ no tiene elemento neutro.

      ii. Si $m = n$, $\mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$ sí tiene elemento neutro I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$. Verifica que A · I = I · A = A.

   (d) En general no tiene elemento simétrico (inverso).
   Una matriz cuadrada A $\in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$ tiene inversa si $\exists$ A' $\in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$ tal que A · A' = A' · A = I. La inversa de una matriz A es única y se representa por A^{-1}

   (e) Distributiva:
   (A + B) · C = A · C + B · C; A, B $\in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$, C $\in \mathcal{M}_{nxp}(\mathbb{K})$
   A · (B + C) = A · B + A · C; A $\in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$, B, C $\in \mathcal{M}_{nxp}(\mathbb{K})$

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS en una matriz A $\in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{K})$:

1. Multiplicar una fila por un número $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo.
2. Intercambiar dos filas entre sí.
3. Sumar o restar a una fila un múltiplo de otra fila.

Ejemplo 2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to 2f_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICES ELEMENTALES por filas (de orden m): Son aquellas matrices cuadradas que resultan de aplicar una operación elemental por filas a la matriz identidad I_m. Hay tres tipos

1. Intercambiar las filas i y j en la matriz identidad (E_{ij}).
2. Multiplicar la fila i de la matriz identidad por un número $\lambda \neq 0$ ($\mathrm{E}_i(\lambda)$)
3. Sumar a la fila i la fila j multiplicada por λ en la matriz identidad ($\mathrm{E}_{ij}(\lambda)$)

Ejemplo 2.2.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{f_3 \to -3f_3} \quad E_3(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 2f_2} \quad E_{32}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS en una matriz $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{Z}_2)$:

1. Intercambiar dos filas entre sí.
2. Sumar una fila a otra fila.

Ejemplo 2.3.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_1} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

MATRICES ELEMENTALES por filas: En $\mathbb{Z}_2$ hay dos tipos

1. Intercambiar las filas i y j en la matriz identidad (E_{ij}).
2. Sumar a la fila i la fila j en la matriz identidad ($\mathrm{E}_{ij}(\bar{1})$)

Ejemplo 2.4.

$$I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} E_{12} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} E_{32}(\bar{1}) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Relación entre matrices elementales y operaciones elementales: Realizar en una matriz A $\in \mathcal{M}_{mxn}$ una operación elemental por filas es equivalente a multiplicar por la izquierda dicha matriz por la matriz elemental, de orden m, correspondiente.

Ejemplo 2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to 2f_1} A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} A''' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E_1(2)A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A' \\ E_{23}A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A'' \\ E_{21}(-1)A'' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A''' \end{aligned}$$

Por tanto, $A''' = E_{21}(-1)E_{23}E_1(2)A$

Observación 2.6. Todas las matrices elementales tienen inversa y se verifica que

$$\mathrm{E}_{ij}^{-1} = \mathrm{E}_{ij} \qquad \mathrm{E}_i^{-1}(\lambda) = \mathrm{E}_i(\tfrac{1}{\lambda}) \qquad \mathrm{E}_{ij}^{-1}(\lambda) = \mathrm{E}_{ij}(-\lambda)$$

Luego, su inversa es también una matriz elemental.

Ejemplo 2.7.

$$E_{23}E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2(2)E_2(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}(-2)E_{13}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.8. En el caso de $\mathbb{Z}_2$, las inversas de las matrices elementales son

$$\mathrm{E}_{ij}^{-1} = \mathrm{E}_{ij} \qquad \mathrm{E}_{ij}^{-1}(\bar{1}) = \mathrm{E}_{ij}(\bar{1})$$

.

MATRIZ DE PASO: Sea una matriz A $\in \mathcal{M}_{mxn}$ y sea B una matriz mxn que se obtiene al realizar k operaciones elementales a A. Entonces B=$\mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1$A donde E_i es la matriz elemental asociada a la operación elemental i-ésima. Además, si tomamos la matriz identidad I de orden m, I $\in \mathcal{M}_{mxm}$, y hacemos $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I}_m) \xrightarrow{k\, oprs.elts.} (\mathrm{B} \mid \mathrm{E})$ se verifica B = E·A donde E = $\mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1$. La matriz E se llama **MATRIZ DE PASO** de A a B.
$(\mathrm{A} \mid \mathrm{I}_m) \sim (\mathrm{E}_1\ \mathrm{A} \mid \mathrm{E}_1\ \mathrm{I}_m) \sim (\mathrm{E}_2\ \mathrm{E}_1\ \mathrm{A} \mid \mathrm{E}_2\ \mathrm{E}_1\ \mathrm{I}_m) \sim \cdots \sim (\mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\ \mathrm{E}_1\ \mathrm{A} \mid \mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\ \mathrm{E}_1\ \mathrm{I}_m) \sim$ $(\mathrm{E\ A} \mid \mathrm{E\ I}_m) \sim (\mathrm{B} \mid \mathrm{E})$

Ejemplo 2.9.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (A'''|E_{21}(-1)E_{23}E_1(2))$$

Ejemplo 2.10.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) = (A'''|E_{23}E_{31}(\bar{1})E_{21}(\bar{1}))$$

Observación 2.11. Si E = $\mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1$, $E \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{K})$ es una matriz de paso, E tiene inversa y es $\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{E}_1^{-1}\mathrm{E}_2^{-1} \cdots \mathrm{E}_{k-1}^{-1}\mathrm{E}_k^{-1}$.
Debemos comprobar que $\mathrm{E}\cdot\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{E}^{-1}\cdot\mathrm{E} = \mathrm{I}$:
$\mathrm{E}\cdot\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1\ \mathrm{E}_1^{-1}\mathrm{E}_2^{-1} \cdots \mathrm{E}_{k-1}^{-1}\mathrm{E}_k^{-1} = \mathrm{I}$
$\mathrm{E}^{-1}\cdot\mathrm{E} = \mathrm{E}_1^{-1}\mathrm{E}_2^{-1} \cdots \mathrm{E}_{k-1}^{-1}\mathrm{E}_k^{-1}\ \mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k-1} \cdots \mathrm{E}_2\mathrm{E}_1 = \mathrm{I}$

FORMA REDUCIDA o ESCALONADA de una matriz A: Es una matriz triangular superior que se obtiene aplicando un número finito de operaciones elementales por filas en la matriz A. Si A es una matriz mxn, una forma reducida o escalonada de A, es una matriz B, mxn, de la siguiente forma

1. Las k primeras filas de B son no nulas $(1 \leq k \leq m)$.
2. Las $m - k$ últimas filas de B son nulas.

3. El primer elemento no nulo (o pivote) de la fila i está a la izquierda del primer elemento no nulo de la fila $i+1$ $(1 \leq i \leq k-1)$.

$$\text{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & b_{1k+1} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & b_{kk} & b_{kk+1} & \dots & b_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO de una matriz A: Es el número de filas NO nulas que hay en una forma reducida o escalonada de A.

Ejemplo 2.12.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2+\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3-\frac{3}{4}f_1} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{Forma\,Escalonada\,de\,A\,.\,Rango\,2} \xrightarrow{\frac{1}{4}f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{Forma\,canonica\,de\,A}$$

FORMA CANÓNICA POR FILAS o FORMA ECHELON-FILA de una matriz A: Es la forma reducida o escalonada de A más sencilla posible, que se puede obtener mediante operaciones elementales por filas, en la matriz A; tiene la siguiente forma: sea B una forma reducida de A. En ella los pivotes son todos unos y por encima de los pivotes se hacen ceros.

- Si $b_{ii} \neq 0$ entonces se puede transformar en 1 y hacer ceros por encima de él $(1 \leq i \leq k)$.
- Si $b_{ii} = 0$ entonces no se podrán hacer ceros por encima de él $(1 \leq i \leq k)$.

Es decir, el primer elemento NO nulo de cada fila es un 1, se encuentra a la izquierda del primer elemento NO nulo de la fila siguiente y por encima de l todos los elementos son 0.

Esta matriz es una forma reducida y es única, aunque el proceso para llegar a ella no sea único (la notaremos Ec(A)). Se obtiene continuando con operaciones elementales a partir de una forma reducida.

Ejemplo 2.13. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar una sucesión de matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_k$ tal que $E_k \cdots E_2E_1A$ sea la forma canónica por filas o forma echelon-fila de A y obtener la matriz de paso.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{E_1A}\ \underbrace{}_{E_1}\qquad\qquad \underbrace{}_{E_3E_2E_1A}\ \underbrace{}_{E_3E_2E_1}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{E_4E_3E_2E_1A}\ \underbrace{\quad}_{E_4E_3E_2E_1}\qquad \underbrace{\quad}_{E_5E_4E_3E_2E_1A}\ \underbrace{\quad}_{E_5E_4E_3E_2E_1}\qquad \underbrace{\quad}_{E_6E_5E_4E_3E_2E_1A}\ \underbrace{\quad}_{E_6E_5E_4E_3E_2E_1}$$

Por tanto la matriz de paso $E = E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ verifica que $EA = I_3$, siendo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.14. A $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$ es **invertible**, regular o no singular $\Leftrightarrow rg\,(A) = n$. Su forma canónica por filas es la identidad y la matriz de paso de A a su forma canónica es la inversa de A.
Por tanto, se puede utilizar el método anterior para calcular la inversa de $A \in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$, si existe:

$$(\mathrm{A}\ |\mathrm{I}_n) \xrightarrow{k\ oprs.\ elts.} \left(\underbrace{\mathrm{A'}}_{\text{f.reducida}}\ \middle|\ \mathrm{E'}\right) \xrightarrow{k\ oprs.\ elts.} \left(\underbrace{\mathrm{Ec(A)}}_{\text{f.canon.}}\ \middle|\ \mathrm{E}\right)$$

Si rango de A, que es el número de filas no nulas de A', es n entonces Ec(A) = I_n y E = A^{-1} (ver apartado aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius). Veamos que efectivamente E es la inversa de A:
Como E es la matriz de paso de A a I_n, E $\cdot$ A = I_n. Por otra parte, como vimos anteriormente, E tiene inversa por lo que A $\cdot$ E = $\mathrm{E}^{-1}\cdot$ E $\cdot$ A $\cdot$ E = $\mathrm{E}^{-1}\cdot$ I_n $\cdot$E = I_n. Por tanto A^{-1} = E.

Observación 2.15. A $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$ es invertible $\Leftrightarrow$ A es producto de matrices elementales.

PROPIEDADES DE LA INVERSA: Sean A, B $\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!K)$ invertibles.

- La inversa, si existe, es única.
- $(\ \mathrm{A}^{-1}\ )^{-1}$
- $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$,

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es una expresión de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con a_{ij}, $b_i \in I\!K$ números dados.

Representación de un sistema en FORMA VECTORIAL: En forma vectorial el sistema sería

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Representación de un sistema en FORMA MATRICIAL: Si escribimos el sistema en forma de ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \iff \mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

con $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{mxn}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{nx1}$ y $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{mx1}$

La matriz A se llama **MATRIZ DE COEFICIENTES** del sistema A**x**=**b** y b es la m-tupla de términos independientes.

MATRIZ AMPLIADA de un sistema: La matriz $\mathrm{A}^* = (\mathrm{A} \mid \mathbf{b}) \in \mathcal{M}_{mx(n+1)}$ se llama matriz ampliada del sistema A**x**=**b**.

SOLUCIONES: Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas A**x**=**b**, una solución del sistema es una n-tupla de números $(s_1, \dots, s_n)$ con $s_i \in I\!\!K$ tal que $\mathrm{A}\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Teorema 3.1. Si un sistema A**x**=**b**, con coeficientes en $I\!\!K$ infinito, tiene más de una solución. Entonces, tiene infinitas soluciones.

Demostración: Sean s_1 y s_2 dos soluciones distintas del sistema A**x**=**b**. Por tanto, $\mathrm{A}s_1=\mathbf{b}$ y $\mathrm{A}s_2=\mathbf{b}$. Tomamos $s = \alpha s_1 + \beta s_2$ tal que $\alpha + \beta = 1$; $\mathrm{A}s=\mathrm{A}(\alpha s_1 + \beta s_2)=\alpha \mathrm{A}s_1+\beta \mathrm{A}s_2=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{b}=(\alpha + \beta)\mathbf{b}=\mathbf{b}$. Por tanto, s es solución del sistema A**x**=**b** y como hay infinitas formas de tomar α y β tal que $\alpha + \beta = 1$ hay infinitas soluciones. ■

Luego, un sistema o No tiene solución, o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.

SISTEMA INCOMPATIBLE: No tiene solución.

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO: Tiene una única solución.

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO: Tiene infinitas soluciones.

SISTEMA HOMOGÉNEO: El sistema A**x**=**b** es **homogéneo** si **b**=**0**.

Observación: Todo sistema homogéneo es compatible, al menos posee la solución trivial $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

SISTEMAS EQUIVALENTES: Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

3.1 Resolución de sistemas por el método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss para resolver el sistema A**x**=**b** consiste en realizar operaciones elementales en la matriz (A | **b**) para ir eliminando incógnitas y obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver.

Ejemplo 3.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = -3 \\ 3x + 9y + 4z = -7 \\ 2x - y + z = 6 \end{array} \right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3 - 2f_1]{f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = -3 \\ -7y - z = 12 \\ z = 2 \end{cases}$$

Este sistema es más sencillo de resolver, sus soluciones son $z = 2$, $y = -2$, $x = 1$. Veamos que tiene las mismas soluciones que el sistema original.

Teorema 3.3. Si (A' **b**') se ha obtenido aplicando a (A **b**) un número finito de operaciones elementales por filas, los sistemas A**x**=**b** y A'**x**=**b'** son equivalentes (tienen el mismo conjunto de soluciones).

Demostración: Supongamos que (A' **b**') se ha obtenido aplicando k operaciones elementales por filas en la matriz (A **b**). Por tanto, (A' **b**')=E(A **b**) con E=$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$, producto de matrices elementales; luego tienen inversa y A'=EA y **b**'=E**b**.

Sea s solución de A'**x**=**b**', es decir A'**s**=**b**' y sustituyendo A'=EA y **b**'=E**b** obtenemos,

$$EA\mathbf{s} = E\mathbf{b} \Leftrightarrow \underbrace{E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1}_{I} A\mathbf{s} = \underbrace{E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1}_{I}\mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{s} = \mathbf{b}$$

■

El método de Gauss consiste en obtener una forma reducida (A' **b'**) de la matriz (A **b**)

$$\text{(A' b')=} \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1k} & a'_{1k+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & a'_{kk} & a'_{kk+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y resolver el sistema A'**x**=**b'** que será de la forma

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \quad \dots \quad + a'_{1k}x_k + a'_{1k+1}x_{k+1} + \quad \dots \quad + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{kk}x_k + a'_{kk+1}x_{k+1} + \quad \dots \quad + a'_{kn}x_n = b'_k \end{cases}$$

El sistema A'**x**=**b'** tiene solución $\iff$ $(0,\dots,0,a'_{kk},\dots,a'_{kn},b'_k) \neq (0,\dots,0,b'_k)$ $\iff$ rg(A)=rg(A **b**)
En cuyo caso la solución se obtiene a partir de

$$\left.\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + \quad \dots \quad + a'_{1k}x_k & = & b'_1 - a'_{1k+1}\lambda_{k+1} - \dots - a'_{1n}\lambda_n \\ \ddots \qquad\qquad & & \\ a'_{kk}x_k & = & b'_k - a'_{kk+1}\lambda_{k+1} - \dots - a'_{kn}\lambda_n \\ x_{k+1} & = & \lambda_{k+1} \\ \vdots & & \\ x_n & = & \lambda_n \end{array}\right\}$$

Si k=n la solución será única.

Por tanto, el método de Gauss nos dirá si el sistema A**x**=**b** tiene solución y determina la solución en caso afirmativo.

Teorema 3.4. (Teorema de Rouché-Frobenius) Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sea A la matriz de los coeficientes del sistema y (A **b**) la matriz ampliada. Se tiene

1. El sistema es Compatible Determinado $\iff$ rg(A) = rg(A b) = n

2. El sistema es Compatible Indeterminado $\iff$ rg(A) = rg(A b) < n

3. El sistema es Incompatible $\Longleftrightarrow$ rg(A) < rg(A b)

Ejemplo 3.5.

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+z=2\\ 2x+y-z=4\\ x+4y-2z=2 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{rg(A)=rg(Ab)=2<3\Rightarrow S.C.I.}$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y+z=2\\ 7y-3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\frac{2}{7}\lambda\\ y=\frac{3}{7}\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Ejemplo 3.6.

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+z=2\\ 2x+y-z=2\\ x+4y-2z=2 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{rg(A)=2,rg(Ab)=3\Rightarrow S.I.}$$

OBSERVACIÓN: Los dos sistemas se podrían haber resuelto a la vez por tener la misma matriz de coeficientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 7 & -3 & 0 & -2\\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 7 & -3 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\nearrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{S.C.I.}$$

$$\searrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{S.I.}$$

4 Aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius

4.1 Cálculo de la Matriz Inversa

Teorema 4.1. Dada A una matriz cuadrada, nxn, existe **Inversa** de A (que notaremos A^{-1}) $\Longleftrightarrow$ rg(A)=n. Además, si existe es única y diremos que A es invertible (o regular o no singular).

Demostración: Buscamos una matriz X única tal que AX=XA=I. Sean las matrices

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

queremos encontrar X e Y tal que AX=YA=I ($(\mathrm{YA})^t=\mathrm{A}^t\mathrm{Y}^t=\mathrm{I}$). Por el teorema de Rouché-Frobenius los sistemas

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ \vdots\\ x_{n1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{n2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},\dots,\ \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_{1n}\\ x_{2n}\\ \vdots\\ x_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\mathrm{A}^t \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathrm{A}^t \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tienen solución única si y sólo si rg(A) = n. (**Observación:** Hemos usado que rg(A)=rg(A^t))

Además, si AX=I y YA=I $\Longrightarrow$ YAX=X $\overset{\mathrm{AX=I}}{\Longrightarrow}$ X=Y.

Luego, A es invertible si y sólo si rg(A) = n. ■

Pasos para el cálculo de la inversa de una matriz A, *nxn*:

1. Realizar operaciones elementales por filas en la matriz (A I) hasta obtener una matriz (A' E') con A' una forma reducida de A.
2. Si rg(A) < n $\Longrightarrow$ A no es invertible.
3. Si rg(A) = n $\Longrightarrow$ Seguir realizando operaciones elementales en (A' E') hasta obtener una matriz (I E). La inversa de A será la matriz E.

Proposición 4.2. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$ por la unicidad de la inversa y $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ ya que $\mathrm{ABB}^{-1}\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{I}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{AB} \Rightarrow (\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Corolario 4.3. Una matriz A es invertible $\iff$ A es producto de matrices elementales.

Demostración: Sea A una matriz *nxn*, A es invertible $\iff$ rg(A)=n $\iff$ (A I) $\xrightarrow{oprs.\,elts.}$ (I E) tal que I=EA con E=$E_k E_{k-1} \cdots E_1$ producto de matrices elementales $\iff$ A=$E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. ■

Ejemplo 4.4.

$$\begin{pmatrix} A \,|\, I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rg(A)=3 $\Rightarrow$ Invertible

$$\xrightarrow{f_1+f_2-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A^{-1}

Ejemplo 4.5.

$$\begin{pmatrix} A \,|\, I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

rg(A)=2 $\Rightarrow$ NO Invertible

4.2 Eliminación de Parámetros

Sean las ecuaciones paramétricas

$$\text{(I)}\left\{\begin{array}{l} x_1 = b_1 + b_{11}t_1 + \ldots + b_{1p}t_p \\ x_2 = b_2 + b_{21}t_1 + \ldots + b_{2p}t_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_n + b_{n1}t_1 + \ldots + b_{np}t_p \end{array}\right.$$

con b_{ij}, $b_i \in I\!R$ números dados. En forma matricial serán

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b_1}} t_1 + \ldots + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b_p}} t_p \iff \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{b_1}t_1 + \ldots + \mathbf{b_p}t_p$$

Eliminar los parámetros $t_1, \ldots, t_p$ en (I) significa obtener un sistema de ecuaciones lineales en las variables $x_1, \ldots, x_n$ en el que no figuren los parámetros $t_1, \ldots, t_p$ y cuyas soluciones sean (I), es decir, significa resolver el sistema (I) tomando $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ como términos independientes. Por tanto, la eliminación de parámetros es el problema inverso al de hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Supongamos que rg$(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_p})_{nxp}$ = k y si reducimos la matriz $(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_p} \mid \mathbf{x} - \mathbf{b})_{nx(p+1)}$ nos quedará una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} b'_{11} & \cdots & b'_{1k} & \cdots & b'_{1p} & \\ & \ddots & & & & \\ & & b'_{kk} & \cdots & b'_{kp} & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 \\ & \cdots & & \cdots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{n-k1}x_1 + \ldots + a_{n-kn}x_n + a_{n-k} \end{array}\right)$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema (I) tiene solución si y sólo si rg$(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_p})$= rg$(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_p} \mid \mathbf{x} - \mathbf{b})$=k

$$\text{(II)}\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-k1}x_1 + \ldots + a_{n-kn}x_n + a_{n-k} = 0 \end{array}\right.$$

El sistema (II) es el resultado de la eliminación de parámetros en (I), y las soluciones del sistema (II) son precisamente (I).

Ejemplo 4.6.

$$\text{Ecs. Paramétricas}\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2r + s + 3t \\ y = 2 + r - 2s - t \\ z = 1 - r + s \\ u = 1 + r + s + 2t \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & x+1 \\ 1 & -2 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u-1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y-2 \\ 2 & 1 & 3 & x+1 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 - 2f_1, f_3 + f_1, f_4 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y-2 \\ 0 & 5 & 5 & x-2y+5 \\ 0 & -1 & -1 & y+z-3 \\ 0 & 3 & 3 & u-y+1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + 1 \\ 0 & -1 & -1 & y+z-3 \\ 0 & 3 & 3 & u-y+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3+f_2,f_4-3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5}(x-2y+5) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y+z-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y+u-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+3y+5z=10 \\ -3x+y+5u=10 \end{array} \right. \quad \text{Ecs. Implícitas}$$